LÓGICA PROPOSICIONAL

1. INTRODUCCIÓN

1.1. El lenguaje natural

El lenguaje ordinario, el que utilizamos normalmente para comunicarnos y expresar nuestros pensamiento, deseos o situaciones, es lo que se conoce como lenguaje natural. Este lenguaje se caracteriza por tener una extraordinaria riqueza. De hecho, todos los días se generan nuevos términos y usos.

Sin embargo, esta riqueza expresiva que tiene el lenguaje natural, aunque es muy útil en el terreno de las artes, no lo es tanto en otros ámbitos. Así, hay ciertos campos de la acción humana en los que se requieren rigor y exactitud, como en las matemáticas. Efectivamente, el lenguaje natural presenta ciertas dificultades, de las que la ciencia debe huir para llevar a cabo su labor. Veamos dos de esas dificultades:

- La ambigüedad. Muchas palabras cotidianas son polisémicas, es decir, poseen varios significados (fuerza, potencia...). Otras dependen del contexto y del uso que se les dé (inteligencia, vida, belleza, frontera, todo, algo...). Todas ellas nos son útiles para dialogar y reflexionar, pero también pueden dar lugar a equívocos cuando, por ejemplo, los interlocutores se refieren a cosas diferentes (muchos malentendidos se originan justamente porque cada interlocutor da un sentido distinto a una misma palabra).

- Las paradojas. A veces el uso aparentemente correcto del lenguaje nos lleva a caer en contradicciones. Por ejemplo, si yo digo *Soy un mentiroso*, me encuentro en la paradójica situación de que la frase solo puede ser verdadera si es falsa. En efecto, es verdadera si yo soy un mentiroso, pero si lo soy, entonces lo afirmado es falso. Nos encontramos, por tanto, ante dos posibilidades contradictorias que se implican entre sí, aunque sintácticamente la frase es correcta.

Estos y otros problemas desaconsejan el uso del lenguaje natural cuando se buscan la máxima objetividad y rigor para comunicarnos, como es el caso de los científicos.

1.2. El lenguaje formal

Para evitar problemas como los anteriores, se han construido lenguajes artificiales, como el de las matemáticas o la lógica. Es el llamado lenguaje formal. Tiene las siguientes características:

- No utiliza palabras, sino símbolos (x, y, p, q...). Estos símbolos constituyen su vocabulario específico.

- Los símbolos se enlazan unos con otros mediante otros signos especiales que pueden llamarse en función de la disciplina operadores o conectores, realizan la misma función que en el lenguaje natural realizan las conjunciones, preposiciones, etc.

- Posee unas reglas que sirven para utilizar y operar correctamente con dichos símbolos. De la misma manera que en el lenguaje natural no podemos decir "casa la vacía está aunque", en el lenguaje formal también existen reglas sintácticas que es necesario respetar para construir correctamente las frases o fórmulas.

Prescinde por completo del significado semántico de los símbolos. En (2 + 2 = 4) no importa si se refiere a euros o manzanas. Lo fundamental es que el razonamiento está correctamente construido. Esta posibilidad de prescindir de un significado natural específico permite evitar los principales problemas relacionados con las ambigüedades, etc.

1.3. Qué es la lógica

Lógica es la ciencia que estudia las formas generales de nuestro pensamiento, es decir, el razonamiento correcto, que pone orden en nuestros pensamientos y en las palabras que los expresan.

Un razonamiento es aquel conjunto de enunciados que presenta una serie de afirmaciones o juicios de forma estructurada. Este puede ser correcto, si su estructura es coherente, o incorrecto, si no lo es. Es decir, razonar es deducir una o varias conclusiones a partir de ciertos datos (premisas) que ya se poseían previamente.

Premisas: Son los datos que se tienen previamente y que constituyen el punto de partida del razonamiento. Su verdad o falsedad no se cuestiona.

Deducción: Es el proceso por el cual, partiendo de unos datos obtenemos ciertas conclusiones derivadas de las relaciones entre esos datos.

Conclusión: Es el resultado final que obtenemos tras haber aplicado correctamente las reglas lógicas en la deducción y será el fin y finalidad del razonamiento.

1.4. La verdad formal

En lógica, no se afirma que los razonamientos son verdaderos o falsos, sino que son correctos o incorrectos. Esto es así porque:

- La lógica, al ser una ciencia formal, prescinde del significado semántico del contenido. Como veremos, sustituye los términos del lenguaje natural por términos simbólicos.
- Por el hecho de ser una ciencia formal, el objetivo de la lógica es averiguar la validez o invalidez de la estructura, el orden y la coherencia de nuestras ideas y pensamientos.
- Los conceptos de verdad y falsedad se aplican solo a aquellas proposiciones o enunciados que se refieren a la experiencia real, a los hechos. Es la llamada verdad material. Por ello la lógica contempla las dos posibilidades, dado que sus proposiciones no tienen en cuenta los hechos.
- La lógica, como las matemáticas, se mueve exclusivamente en el mundo de las ideas. Por ello, no puede decidir si un argumento es verdadero o falso respecto al mundo de los hechos, solo si es válido o correcto en sí mismo. Es la llamada verdad formal. Según esta verdad, un razonamiento es válido o correcto cuando su verdad se deduce de la estructura interna de las premisas o proposiciones que lo componen, sin necesidad de recurrir a los hechos que sostienen dicho razonamiento.

En resumen, el objetivo final de la lógica es demostrar la validez o verdad formal de un razonamiento, la cual depende exclusivamente de la coherencia interna que hay entre los términos de dicho razonamiento. Por el contrario, las proposiciones del lenguaje natural basadas en la observación, utilizadas por las ciencias naturales y sociales, necesitan ser contrastadas empíricamente para comprobar su verdad o falsedad.

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL.

2.1. Los enunciados

Los significados en un lenguaje se expresan a través de enunciados. Los enunciados son las fórmulas lingüísticas con sentido. Existen varios tipos de enunciados, entre ellos los siguientes: interrogativos, desiderativos, imperativos y declarativos.

La lógica se centra en los enunciados declarativos, ya que son estos los que describen o predican algo sobre la realidad a la que refieren, y por tanto, son los únicos que podemos calificar propiamente de verdaderos o falsos. Generalmente llamaremos proposiciones lógicas a este tipo concreto de enunciado.

1º Enunciado atómico, aquel que consta de una sola proposición en la que se afirma o se niega una sola cosa. Como consecuencia, este tipo de enunciado no puede descomponerse en expresiones más reducidas sin que pierda por completo su sentido. Ej: La filosofía es muy útil.

2º Enunciado molecular, aquel que consta de dos o más proposiciones, es decir, de dos o más enunciados atómicos. Por tanto, puede reducirse o fragmentarse en cualquiera de los enunciados atómicos que lo componen sin que por ello se pierda el sentido. Ej: La filosofía es muy útil y Gonzalo enseña muy bien filosofía.

La lógica realiza cálculos lógicos con dichos enunciados, al igual que lo hacen las matemáticas. Para realizar dichos cálculos, se hace necesario utilizar los elementos propios de un lenguaje formal, esto es, el vocabulario específico, los conectores entre diferentes enunciados y las reglas específicas para operar o calcular.

En definitiva, este lenguaje está construido mediante símbolos, prescindiendo así del lenguaje natural y sus implicaciones. Estos símbolos son:

- Las variables
- Los conectores
- Los paréntesis y los corchetes

2.2. Las variables

Cada enunciado se reemplaza o simboliza en bloque, utilizando para ello letras minúsculas que, por regla general, son las siguientes: p, q, r, s, t. Aunque puede usarse cualquier otra letra del alfabeto. Estas letras reciben el nombre de variables y se utilizan para sustituir cualquier enunciado atómico.

2.3. Los conectores o conectivas

Cuando una persona piensa o se expresa lingüísticamente, no utiliza enunciados atómicos (frases sueltas), sino moleculares. Nuestros pensamientos más simples normalmente van unidos por una serie de enlaces o partículas que, en lógica, llamamos conectores o conectivas, y que sirven para enlazar y para relacionar enunciados entre sí.

- **Conjunción o conjuntor:** Responde a la conjunción "y" y se simboliza con "^". Significa que ocurre tanto la primera como la segunda proposición. Ej: *Gonzalo explica muy bien lógica y los alumnos de 1º no hacen los ejercicios*. Se escribe así: p ^ q

- **Disyunción inclusiva:** Se utiliza para expresar proposiciones en las que sucede lo expresado en el primer enunciado, o lo expresado en el segundo enunciado, o lo expresado en los dos. Suele venir expresados con la disyunción "o" del lenguaje natural. Se simboliza así "v". Ej: Para beber habrá agua, refrescos o vino. Se escribe: p v q v r

- **Disyunción exclusiva:** Responde a la expresión "o esto o aquello". Significa que o se cumple el primer enunciado o el segundo pero no los dos al mismo tiempo, uno excluye al otro. Se simboliza así "$\underline{v}$". Es común que en el lenguaje natural exista cierta ambigüedad entre los dos tipos de disyunción, para poder traducirlo correctamente al lenguaje formal tenemos que fijarnos en indicadores que podrían ser semánticos para decidir cuál es el correcto. Ej: La copa del rey la ganará el Real Madrid o el F.C. Barcelona. (Sabemos que es exclusivo porque no puede haber dos ganadores). Se escribe: $p \veebar q$. Ej: Los seres humanos son hombres o mujeres.

- **Condicional:** Se simboliza con "→" y significa que si ocurre lo expresado en el primer enunciado obligatoriamente ocurre lo expresado en el segundo enunciado. Se corresponde con expresiones en el lenguaje natural del tipo "Si… entonces". Ej: Si te acuestas te cuento un cuento. Se escribe: $p \rightarrow q$

- **Bicondicional:** Responde en castellano a expresiones del tipo "Si y solo si". Significa que lo que sucede en el segundo enunciado sólo sucederá si ocurre lo expresado en el primero y viceversa, es decir, si se da uno se da el otro, no puede darse uno sin darse el otro, por lo que nunca se dará uno sí y otro no, o se dan los dos o no se da ninguno. Ej: Si y solo si apruebas 2º de Bachillerato podrás hacer Selectividad. Se escribe: $p \leftrightarrow q$

  El bicondicional es el resultado de unir dos condicionales, podría escribirse también del siguiente modo: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

- **Negación:** Sirve para negar cualquier enunciado, proposición o conjunto de enunciados. Se simboliza con "¬". Ej: No vais a hacer siempre los ejercicios de lógica. Se escribe: $\neg p$ Ej: No es verdad que si estudias apruebas. Se escribe: $\neg (p \rightarrow q)$

- **Paréntesis y corchetes:** "(…)" y "[…]" Se utilizan para visualizar correctamente el orden de los componentes, indicar cuáles son los conectores principales y cuáles los secundarios, y para evitar ambigüedades. Ej: $p \rightarrow q \vee r$ (estaría formulado de manera incorrecta) ya que puede significar varias cosas diferentes: $p \rightarrow (q \vee r)$; $(p \rightarrow q) \vee r$

3. TABLAS DE VERDAD

3.1. Valores de verdad

Decíamos que un enunciado es aquella proposición con sentido pleno de la cual se puede decir que es verdadera o falsa. Para conocer todos los valores de verdad que puede tener una proposición, o un conjunto de ellas, se elaboran las llamadas tablas de verdad. Las tablas de verdad tienen como objetivo establecer los valores posibles que puede tener un enunciado.

Un enunciado atómico solo puede tener dos valores: o es verdadero o es falso. Su tabla de verdad por tanto será:

p
V
F

En un enunciado molecular aparecen al menos dos variables de enunciados: p y q, unidos por algún conector. Habrá que saber qué posibles combinaciones pueden existir entre la verdad y la falsedad de los enunciados que la componen. La regla 2^n. Donde "n" representa el número de enunciados. Veamos un ejemplo, si tenemos dos enunciados, si aplicamos la regla tendremos 4 posibles combinaciones ($2^2 = 4$). Si tenemos tres enunciados serán 8 posibles combinaciones, etc…

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Las tablas de verdad nos sirven para analizar todas las posibilidades que la combinación de enunciados mediante conectores nos brinda. Es decir, sabremos de antemano si una proposición es verdadera o falsa siempre y cuando conozcamos la verdad o falsedad de sus enunciados.

3.2. Tabla de verdad de la negación

Si un enunciado cualquiera es verdadero, su negación será falsa, y si un enunciado es falso, su negación será verdadera. Es decir, cambia automáticamente el valor de verdad del enunciado o proposición por su contrario.

┐	p
F	V
V	F

3.3. Tabla de verdad de la conjunción

Para que una conjunción sea verdadera es necesario que sus dos enunciados sean verdaderos. Por tanto, si uno de los dos o los dos son falsos, la conjunción también lo será.

p	^	q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**F**	V
F	**F**	F

3.4. Tabla de verdad de la disyunción inclusiva

Para que una disyunción inclusiva sea verdadera es necesario que al menos uno de sus dos enunciados sea verdadero. Por tanto, si uno de los dos o los dos son verdaderos, la disyunción también lo será. Solo será falsa si ambos son falsos.

p	v	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

3.5. Tabla de verdad de la disyunción exclusiva

Para que una disyunción exclusiva sea verdadera es necesario que uno y sólo uno de sus dos enunciados sea verdadero. Por tanto, si los dos son verdaderos o los dos son falsos, la disyunción será falsa.

p	$\underline{v}$	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

3.6. Tabla de verdad del condicional

Una proposición condicional solo será falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Llamamos antecedente al primer enunciado y consecuente al segundo. Esto es así, porque el antecedente es la condición suficiente pero no necesaria del consecuente, es decir, el consecuente podría darse sin que se diera el antecedente (no necesariamente al darse el consecuente tiene que darse el antecedente).

p	→	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

3.6. Tabla de verdad del bicondicional

Una proposición bicondicional es verdadera siempre y cuando coincidan los valores de verdad de sus dos enunciados. Es decir, será verdadero si los dos son verdaderos o si los dos son falsos. Será falso cuando uno sea verdadero y otro falso.

p	↔	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

3.7. Tablas de verdad de proposiciones complejas

Generalmente las proposiciones suelen combinar distintos tipos de conectores, por lo que habrá que ir combinando de manera correcta los valores de verdad teniendo en cuenta los paréntesis y corchetes hasta llegar al conector principal que será el que determinará los valores de verdad definitivos de toda la proposición. Veamos un ejemplo:

p	^	(q	↔	r)
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	V	F

Si en la columna final, todos los casos posibles son verdaderos decimos que es una proposición tautológica (tautología). Si todos los casos posibles son falsos decimos que es una falacia. Si se mezclan verdades y falsedades decimos que es una incertidumbre.

4. REGLAS DE INFERENCIA Y TRANSFORMACIÓN

REGLA Y EJEMPLO	DEFINICIÓN	AVISO ERRORES HABITUALES
<u>Adjunción:</u> -1. p -2. q 3. p ^ q (Adj. 1 y 2)	Podemos unir mediante un conjuntor cualquiera de las proposiciones que tengamos. Se lee: Se da "p". Se da "q", por tanto, se da "p" y "q".	No se puede aplicar esta regla solo a parte de una proposición, siempre tendrá que ser aplicada a proposiciones en su totalidad. ~~-1. p v q~~ ~~-2. r~~ ~~3. p ^ r (Adj. 1 y 2)~~ La forma correcta sería: -1. p v q -2. r 3. (p v q) ^ r (Adj. 1 y 2)
<u>Simplificación:</u> -1. p ^ q 2. p (Simpl.1) -1. p ^ q 2. q (Simpl.1)	Podemos separar una proposición conjuntiva en sus dos enunciados. Se lee: Se da "p" y "q". Por tanto, se da "p". Por tanto, se da "q".	No podemos simplificar una conjunción si está dentro de un paréntesis ligado a otros enunciados mediante algún otro símbolo lógico. ~~-1. (p ^ q) → r~~ ~~2. p (Simpl.1)~~ Sin embargo, si podemos aplicar la norma a proposiciones donde el conjuntor una paréntesis si estos no están a su vez ligados a otros símbolos lógicos. Ej: -1. (p → q) ^ (r v s) 2. (p → q) (Simpl.1) -1. (p → q) ^ (r v s) 2. (r v s) (Simpl.1)
<u>Modus Ponens:</u> -1. p → q -2. p 3. q (M.P. 1 y 2)	Dada una proposición condicional y la afirmación de su antecedente, podremos afirmar su consecuente. Se lee: Si se da "p" entonces se da "q", como se da "p" afirmamos que se da "q"	Si tenemos un condicional y la negación del antecedente no podemos afirmar la negación del consecuente: ~~-1. p → q~~ ~~-2. ┐p~~ ~~3. ┐q (M.P. 1 y 2)~~

REGLA Y EJEMPLO	DEFINICIÓN	AVISO ERRORES HABITUALES
<u>Modus Tollens:</u> -1. p → q -2. ┐q 3. ┐p (M.T. 1 y 2)	Dada una proposición condicional y la negación de su consecuente, podremos negar su antecedente. Se lee: Si se da "p" entonces se da "q", como se da "q" afirmamos que no se da "p" (porque si se diera "p" tendría que darse "q").	Si tenemos un condicional y la afirmación de su consecuente no podemos afirmar su antecedente: ~~-1. p → q~~ ~~-2. q~~ ~~3. p (M.T. 1 y 2)~~
<u>Tollendo Ponens:</u> -1. p v q -2. p → r -3. q → s 4. r v s (T.P. 1, 2 y 3) -1. p $\underline{v}$ q -2. p → r -3. q → s 4. r $\underline{v}$ s (T.P. 1, 2 y 3)	Dada una disyunción y dos condicionales, donde los antecedentes de cada condicional son respectivamente los enunciados de la disyunción, podremos afirmar la disyunción de los consecuentes de dichos condicionales. (Tendremos que respetar en cada caso el tipo de disyunción de origen, bien sea inclusiva bien sea exclusiva). Se lee: Se da "p" o "q". Si se da "p" se da "r". Si se da "q" se da "s". Por tanto, se da "r" o "s".	
<u>Adición:</u> -1. p 2. p v q (Adic.1)	Podemos unir mediante una disyunción inclusiva cualquier proposición que tengamos con cualquier otra. Se lee: Se da "p". Por tanto, se da "p" o "q" (o cualquier proposición que queramos). Estos será siempre cierto, ya que con que uno de los dos enunciados de la proposición se cumpla, la disyunción será cierta.	No se puede aplicar esta regla solo a parte de una proposición, siempre tendrá que ser aplicada a proposiciones en su totalidad. ~~-1. p v q~~ ~~2. p v r (Adic. 1)~~ La forma correcta sería: -1. p v q 2. (p v q) v r (Adic. 1)
<u>Silogismo Hipotético:</u> -1. p → q -2. q → s 3. p → s (S.H. 1 y 2)	Dados dos condicionales, donde el consecuente del primero es el antecedente del segundo, podemos afirmar un nuevo condicional donde el antecedente sea el del primero y el consecuente el del segundo. Se lee: Si se da "p" se da "q". Si se da "q" se da "s", por tanto, si se da "p" se da "s".	

REGLA Y EJEMPLO	DEFINICIÓN	AVISO ERRORES HABITUALES
<u>Silogismo Disyuntivo:</u> Versión 1: -1. $p \vee q$ -2. $\neg p$ 3. q (S.D. 1 y 2) -1. $p \underline{\vee} q$ -2. $\neg p$ 3. q (S.D. 1 y 2) Versión 2: -1. $p \underline{\vee} q$ -2. p 3. $\neg q$ (S.D. 1 y 2)	Dada una disyunción (inclusiva o exclusiva) y la negación de uno de sus enunciados, podemos afirmar el otro enunciado de la disyunción. Se lee: Se da "p" o "q". No se da "p", por tanto, se da "q". Dada una disyunción <u>exclusiva</u> y la afirmación de uno de sus enunciados, podemos negar el otro enunciado de la disyunción. Se lee: O se da "p" o se da "q" (pero no los dos). Se da "p", por tanto, no se da "q".	Si la disyunción es <u>inclusiva</u>, no podemos aplicar esta regla, pues la afirmación de uno de los enunciados no implica la negación del otro, pues pueden darse ambos al tiempo. -1. $p \vee q$ -2. p 3. $\neg q$ (S.D. 1 y 2)
<u>Introducción del Bicondicional:</u> -1. $p \rightarrow q$ -2. $q \rightarrow p$ 3. $p \leftrightarrow q$ (I.B. 1 y 2)	Si tenemos dos condicionales donde el antecedente del primero es el consecuente del segundo, y el consecuente del primero es el antecedente del segundo, podremos crear un bicondicional entre los dos enunciados. Se lee: Si se da "p" entonces se da "q". Si se da "q" entonces de da "p". Por tanto, si y solo si se da "p" se da "q" y viceversa.	
<u>Eliminación del Bicondicional:</u> -1. $p \leftrightarrow q$ 2.$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (E.B. 1) -1. $p \leftrightarrow q$ 2. $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$ (E.B. 1)	Un bicondicional puede transformarse en la conjunción de dos condicionales en los cuales el antecedente del primero debe ser el consecuente del segundo y el consecuente del primero el antecedente del segundo. Se lee: Si y solo si se da "p" se da "q". Si se da "q" y viceversa. Por tanto, si se da "p" se da "q" y si se da "q" se da "p".	

LEYES DE TRANSFORMACIÓN:		
De Morgan: Versión 1: -1. $p \wedge q$ 2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ (De Morgan 1) -1. $\neg p \wedge q$ 2. $\neg(p \vee \neg q)$ (De Morgan 1) -1. $\neg(p \wedge q)$ 2. $\neg p \vee \neg q$ (De Morgan 1) Versión 2: -1. $p \vee q$ 2. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ (De Morgan 1) Etc... (Se pueden hacer múltiples combinaciones tanto de la versión 1 como de la 2) (Los ejemplos pueden leerse también de abajo a arriba ya que De Morgan es una ley de transformación, es decir, otra forma de escribir lo mismo, no se está deduciendo nada).	Dada una proposición conjuntiva, podemos transformarla en una proposición disyuntiva inclusiva siempre y cuando cambiemos el valor de verdad de cada uno de los enunciados y a su vez el del conjunto. Se lee: Se da "p" y "q". Por tanto, no es verdad que no se dé "p" o no se dé "q". Ej: Soy joven y guapo. Por tanto, no es verdad que no sea joven o no sea guapo. Dada una proposición disyuntiva inclusiva, podemos transformarla en una proposición conjuntiva siempre y cuando cambiemos el valor de verdad de cada uno de los enunciados y a su vez el del conjunto. Se lee: Se da "p" o "q". Por tanto, no es verdad que no se dé "p" y no se dé "q". Ej: Soy hombre o mujer. Por tanto, no es verdad que no sea hombre y no sea mujer.	
Conmutativa: -1. $p \wedge q$ 2. $q \wedge p$ -1. $p \vee q$ 2. $q \vee p$ -1. $p \underline{\vee} q$ 2. $q \underline{\vee} p$ -1. $p \leftrightarrow q$ 2. $q \leftrightarrow p$	Podemos cambiar el orden de los enunciados en proposiciones que sean: conjuntivas, disyuntivas (inclusivas o exclusivas) y bicondicionales.	No se cumple en las proposiciones condicionales. ~~-1. $p \rightarrow q$~~ ~~2. $q \rightarrow p$~~